Om primtal og forhold i opgangene

af Christian Marinus Taisbak

Tilegnet en 70 år "gammel mager karl, som spiser ene sin målte mad" (J.V. Jensen, Holberg)

For 45 år siden skrev jeg i forordet til min disputats, DIVISION and LOGOS: *A student and friend of mine,* Fritz Saaby Pedersen, M.A., *undertook the tormenting task of cutting the book to pieces with severe pedantry at an early stage, to save it from public scandal.* Der er således ingen tvingende grund til at opfordre ham til at læse dette lille essay om nogle grundlæggende sætninger i *Euklids* talteori, for det er alt sammen noget han dengang accepterede at kunne udenad. Og dog er formen nok så meget anderledes at han vil mumle involveret: "Var det ikke det jeg sagde? Det Er enkelt."

Det var ikke Euklid der opfandt *primtallene*, men han må bære skylden for at de aldrig, siden bog 7 af hans *Elementer*, har mistet deres position som et af talrækkens og talteoriens vigtigste og forunderligste træk. Og dog er deres oprindelse så enkel at deres betydning var uforudsigelig. Selve navnet, numeri primi, på græsk *πρῶτοι ἀριθμοί*, blev hurtigt så almindelig en terminus blandt matematikere at de glemte dets oprindelse. *Første tal*, hvorfor første, i hvilken forbindelse første?

Det skal jeg røbe om lidt, men først lidt om et hjælpemiddel, en multiplikationstabel. (I parentes: sådanne tabeller var kendt hos babylonerne adskillige århundreder før Euklid.) Den er uundværlig til praktisk regning; som regel er det nok at have en der omfatter multipla af tal mindre end grundtallet, for eksempel 10 eller 12 – resten styres på en abacus med strenge der passer til tabellen.

At tabellen er nyttig hvis man skal multiplicere, véd enhver af os der har gået i skole. Om den også kan bruges til division, er straks mere problematisk. Men lad os først kigge lidt på de forskellige tals opførsel og placering. Vi ser straks at der er nogle tal der er "flittige" og optræder flere steder i tabellen, typisk tallet 12, som ses i 2-, 3-, 4-, 6- og 12-tabellen. Men der er også nogle der kun optræder i randen, altså som indgangs- eller første tal, og vel at mærke: som *kun* første tal, første *par excellence.* Vi aner at en græker kan være fristet til at tale om netop dem som *πρῶτοι ἀριθμοί*, senere på latin *numeri primi,* hvoraf primtal, prime numbers, nombres premiers. Dette er vistnok en af de mange sandheder om antikken som ikke er overleveret fordi enten alle vidste det, eller ingen vidste det.

Vi kan more os med at betragte tabellen som et højhus med opgange. Tabellen hjælper en multiplikation på den måde at *ethvert tal i en opgang er et multiplum af tallet i etage 1* (stueetagen). Skal vi gange 8 med 7, går vi ind i opgang 8 og op til etage 7 og finder 56, sådan som vi lærte i 1. klasse. Hermed er vi allerede næsten færdig med tabellen som hjælpemiddel ved multiplikationer. Men kan den også hjælpe os til at dividere? Lad os tale Euklids matematiske idiolekt, og lad os bruge verbet "måle" (μετρεῖν) om den situation at en division "går op". Så lyder sandheden ovenfor således: *alle tallene i en opgang* måles *af tallet i stueetagen*.

Primtallene kan nu beskrives som dem der kun vil bo i etage 1; beboerne i primtalsopgangen er derimod ikke fastboende – de lejer sig også ind i andre opgange. Hvordan det? Jo, ethvert tal der optræder på etagerne i en primtalsopgang, findes også i mindst en af de andre opgange. For eksempel 6, der findes på tredje etage i 2-eren og på anden etage i 3-eren; den iagttagelse kan vi formulere: *Ethvert tal som ikke er et primtal, måles af mindst to primtal.* Dette udsagn kan skærpes til *Ethvert tal som ikke er et primtal, måles af en entydig mængde af primtal.* Den synes at have været Euklids endelige mål, og er jo den dag i dag en hovedsætning i talteori; *Elementernes* sætning IX.14 kommer meget nær til at vise den explicit.

17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	187	204	221	238	255	272	289	306	323	340	357	374
16	32	48	64	80	96	112	128	144	160	176	192	208	224	240	256	272	288	304	320	336	352
15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	195	210	225	240	255	270	285	300	315	330
14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210	224	238	252	266	280	294	308
13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195	208	221	234	247	260	273	286
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216	228	240	252	264
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165	176	187	198	209	220	231	242
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210	220
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180	189	198
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120	128	136	144	152	160	168	176
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140	147	154
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120	126	132
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105	110
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84	88
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60	63	66
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44
1	2	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10	**11**	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**	20	21	22

Lad os prøve om tabellen kan hjælpe os i en divisionsopgave: kan 29 måles med 8? (Altså 29:8).

Svaret er nej, 29 divideret med 8 giver 3 *med rest* 5. Udtrykt med brøk, 29:8 = 3 + 5/8. Men med brøker forholder det sig sådan at Euklid i sin talteori ikke anser dem for *tal* i samme forstand som de "naturlige" tal (1) 2, 3, 4 … Tallet 1 i parentes, for i den antikke talteori var 1, *μονάς*, ikke et tal som de andre, men det stof, den byggesten, alle tal laves af – og som *måler* alle tal. At brøker alligevel er anledning til den teori Euklid udfolder i bog 7-9 af *Elementerne*, ses af hans terminologi i definitionerne 3 og 4: Et mindre tal er enten en del, *μέρος*, eller en sum af dele, *μέρη*, af et større tal, hvor *μέρος* viser sig at betyde *brøk*del af den type ægypterne brugte: stambrøker, dvs med tæller 1 (eksempler 1/7, 1/20). Men *Elementernes* bog 7 indeholder ikke en teori om brøker, idet hverken addition eller multiplikation af brøker er behandlet. Det ville ellers have været et godt bidrag hvis Euklid havde godtgjort at "den laveste fællesnævner" er den eneste der er sin løn værd; en hvilken som helst større er spild af tid. I tidens medier er begrebet et uforstået skældsord om laveste gennemsnit.

Hvis brøker derfor skal behandles i samme teori som de naturlige tal, må de hele vejen igennem betragtes som *sammenhørende talpar*, og så er vi fremme ved vort emne: λόγος, forhold. Brøken som vi traf ovenfor, 5/8, er forholdet 5 til 8, traditionelt skrevet som 5:8. Fra praktisk regning på abacus og i hovedet stod det klart for regneren at nogle brøker er lige gode, de kan "forkortes" eller "forlænges" uden at skifte værdi (6/8 = 3/4). Det er her, det opmærsomme øje ser multiplikationstabellens medvirken; for kigger vi på de to "opgange" der begynder med 3 og 4 (og altså repræsenterer 3/4), ser vi at alle tallene i disse, betragtet parvis "på samme etage", er lige gode, udtrykker den samme brøk, 3/4, 6/8, 9/12 … Vi vil tillade os som pædagogisk trick at definere et λόγος som *et par sammenhørende søjler* i en multiplikationstabel – men husker at det altså er vores tolkning af fænomenet, ikke Euklids. At det er en ganske god definition vil vise sig derved at de vigtigste egenskaber ved forhold lader sig aflæse af tabellen.

Terminologi og læresætninger.

To etager fra samme forhold, søjlepar, fx 3:4 og 9:12, siges at danne en *proportion*, at være *proportionale.* De respektive par er repræsentanter; vi vil sige at 9:12 er en repræsentant for forholdet 3:4; vi vil sige at de repræsenterer *samme* forhold, ikke at de er lige store. At *a*:*b* og *c*:*d* er samme forhold, vil vi skrive med den internationalt anerkendte notation, dobbeltkolon *a*:*b* :: *c*:*d* og omtale som en proportion. Om forhold og proportioner gælder fire vigtige egenskaber:

A. Forkortelsesreglen: 15:21 :: 5:7 ("forkortet" med 3). Er også en forlængningsregel.

Alment (hvor *a*, *b* og *n* er naturlige tal) *na*:*nb* :: *a*:*b*

B. Ved ombytning af mellemleddene (*ἐναλλάξ*, "over kors") fås en ny proportion: Hvis *a*:***b*** :: ***c***:*d*, så også *a*:***c*** :: ***b***:*d*. (Når 15:21 :: 5:7, så gælder også 15:5 :: 21:7.) Elementært, men vigtigt.

C. Ved overspringelse af lige mange led (δι' *ἴσου*) i hver af to proportioner fås en ny proportion:

Hvis

a:***b*** :: *d*:***e*** & ***b***:*c* :: ***e***:*f*, så gælder også *a*:*c* :: *d*:*f*.

D. Ligestore krydsprodukter: Hvis *a*:*b* :: *c*:*d*, så også *ad* = *bc*, og omvendt.

Disse fire regler er bevist i Elementernes 7. bog – men her vil vi vise at de kan aflæses af multiplikationstabellen, som derfor kan opfattes som inspirationskilden til denne teori.

Sætning A følger umiddelbart af definitionen på en opgang: *ethvert tal i en opgang er et multiplum af tallet i etage 1.*

Sætning B ses ved at lægge tabellen ned på siden, altså drejet 90 grader. Etagerne bliver opgange og omvendt.

Sætning C ses ved at inddrage tre opgange og betragte etager med samme nummer.

5:7 :: 15:21 & 7:11 :: 21 : 33, og derfor 5:11 :: 15:33. (5, 7, og 11 i etage 1 – 15, 21, 33 i etage 3).

Sætning D er lidt mere avanceret: betragt 5:7 :: 15:21. Gå til etage 21 og find i opgang 5 tallet 105, produktet 5 x 21. Det samme tal, 105, findes i opgang 7, etage 15, produktet 7 x 15. En erfaren tabelbruger vil observere det; Euklid beviser det i VII.19.

Lidt mere om primtal og om mindste repræsentant.

Vi lærte ovenfor at e*thvert tal som ikke er et primtal, måles af mindst to primtal.* Ethvert tal, fx 30, måles af et eller andet primtal. Tabellen viser at 2 er det mindste primtal der måler 30, med kvotienten 15. Nu er 15 ikke et primtal, men måles af det næste primtal, 3, med kvotienten 5, som er et primtal. Før eller senere må der komme en kvotient som er et primtal. Euklid viser i IX.14 at *Hvis et tal er det mindste der måles af nogle primtal, kan det ikke måles af noget andet primtal udover de oprindelige*. Denne sætning kan ret enkelt udvides til talteoriens hovedsætning: *Ethvert tal som ikke er et primtal, måles af en entydig mængde af primtal i entydige potenser.* Den synes at have været et af Euklids endelige formål med bøgerne 7-9.

Ethvert forhold er entydigt bestemt ved sin *mindste* repræsentant; dennes tal er altid *indbyrdes primiske*, dvs: de ikke har noget andet fælles mål end 1, og optræder altså kun i stueetagen.

Eksempel: 36:48 ses også i opgangene 18:24, 12:16, 9:12, 6:8, og 3:4, hvor det sidste er det numerisk mindste par. 3:4 er da hovedrepræsentant for forholdet. I min bog benævnes de "forholdets *minimi*". Om dem gælder en hovedsætning (VII.20):

Minimi i et forhold måler enhver repræsentant for forholdet således at forled måler forled og efterled måler efterled med samme kvotient.

Eksempel: 3 måler 36 og 4 måler 48 med kvotienten 12.

Også dette kan umiddelbart aflæses af multiplikationstabellen. Lidt mere avanceret er det at indse at denne sætning er ækvivalent med Gauss' hovedsætning:

Hvis et tal går op i et produkt af to tal og er primisk med det ene tal, går det op i det andet.

Bevis: Antag at et tal e går op i produktet ab, og at e er primisk med b (deres eneste fælles mål er 1).

Så findes en kvotient f, så at $ef = ab$, hvorefter sætning D siger at $e{:}b :: a{:}f$. Men så følger af VII.20 at e går op i a. – Den omvendte sætning er bevist i min bog, side 79, sætning 215.

Udvidelser.

Det siger sig selv at der er mulighed for at udvide teorien til flere opgange end to, og den mulighed udnytter Euklid til fulde i bog 8. Et eksempel: 18:42:60 ::: 6:14:20 ::: 3:7:10; tallene i det sidste sæt er indbyrdes primiske, hvor sættet er repræsentanten *minimi.* Er særligt emne er sammenhængende proportioner, *ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον* (a:b :: b:c :: c:d, for eksempel 27:18 :: 18:12 :: 12: 8). Det fører til nogle vigtige indsigter i potensbegrebet (her tredje potenserne 27 og 8), og til opgaven (som spiller hovedrollen ved problemet *at fordoble en kugle*): at finde to mellemproportionaler (her 18 og 12). Her bidrager multiplikationstabellen med de to opgange 3 og 2, idet vi finder kubiktallet 27 i 3'eren, som står over for 18 i 2'eren; derefter søges 18 i 3'eren over for 12 i 2'eren; og endelig søges 12 i 3'eren over for 8 i 2'eren, hvor det sidste er 2 i tredje.

En helt særlig række er den der hedder "den sammenhængende proportion begyndende med 1", nemlig 1:2 :: 2:4 :: 4:8 :: 8:16 …, altså stigende potenser af 2. Den spiller en rolle ved definitionen af de "fuldkomne" tal, dvs tal som er en sum af deres faktorer. De mindste er 6 = 1 + 2 + 3, 28 = 1 + 2 + 4 + 7 +14, 496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248. Sætning IX.36 anviser en algoritme til at finde dem ved brug af *ἀπὸ μονάδος ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον*.

Envoi.

Det meste af dette lille essay står at læse på side 82 i min disputats DIVISION and LOGOS (1971). På resten af de 128 sider er bog 7-9 forsøgt forstået og kommenteret som en antik pendant til en moderne teori om ækvivalensklasser. Derved forekommer fremstillingen umiddelbart som anakronistisk, og jeg må da også medgive at den er mere matematik end historie. Jeg vil dog tro at hvis man læser den med *Elementerne* i hånden, vil den oplyse mere end den formørker. Jeg antager at Euklid har været helt fortrolig med oprindelsen til betegnelsen *primtal* – hvis ikke, har jeg da lært hans *manes* i Elysion noget, som Fritz Saaby Pedersen og jeg aldeles ikke tvivler på.