## Al-Kūhī's tilføjelser til Euklid's *Data*: The Importance of Being Known[*1]

*af Len Berggren og Glen Van Brummelen*

### *Indledning*

Abū Sahl al-Kūhī, en af middelaldernes største arabiske geometere, levede i anden halvdel af det tiende århundrede. Selvom han skrev om mange forskellige emner, behandlede hovedparten af hans værker geometri i de store græske geometeres stil — herunder Euklid, Archimedes, og Apollonios. Faktisk eksemplificerer hans geometri det bedste i middelalderens Arabien, idet den viderebringer traditioner fra de bedste af hans græske forgængere.

Mange af al-Kūhīs afhandlinger udforsker variationer over et særligt euklidisk tema; for eksempel "Om at trække to linjer fra et punkt med en kendt vinkel ved hjælp af analysemetoden", hvori der løses tretten forskellige geometriske situationer baseret på scenariet i overskriften.[2] Hans redskaber til at nærme sig disse problemer var først og fremmest sætningerne i Euklids *Elementer* og i *Data*. Førstnævnte, som er det berømte værk om geometrisk **syntese**, er i dag langt bedre studeret og forstået end det sidstnævnte, der er en guide til udøvelse af **analyse**. Og dog ville al-Kūhīs synspunkt have været at de to fremgangsmåder var beregnet på at gå hånd i hånd med analysen som et udgangspunkt, hvorfor syntesen, det velkendte geometriske bevis, kunne konstrueres.

Al-Kūhīs forbindelse med Euklids arbejder gik imidlertid langt videre end til kun at bruge dem i sin geometri. Han bidrog også aktivt til, ja ligefrem forbedrede, selve Euklids geometriske afhandlinger. Hans revision af første bog af *Elementerne* ændrede på drastisk vis rækkefølgen af sætningerne og udelod konstruktionerne som findes hos

1. Vores titel er en hyldest til [Taisbak 2003], *Euclid's Data: The Importance of Being Given*, hvor han lægger vægt på den forandrede terminology fra græsk "givet" til arabisk "kendt". (Vi mener Oscar Wilde ville have bifaldet det!)
2. Se udgaven og oversættelsen i [Berggren/Van Brummelen 2001].

* På dansk ved Hanne Strand og Chr. Gorm Tortzen

Euklid.[3] Reorganiseringen ser ud til at være begrundet i hans tiltro til anvendelsen af parallelpostulatet (som Euklid havde undgået at bruge så længe som muligt), og ved indføjelsen af et nyt bevis for Pythagoras' sætning. Han reviderede ikke anden bog af *Elementerne* men tilføjede snarere en række sætninger, af hvilke nogle særligt havde til formål at støtte studiet af Apollonios' *Keglesnit*.[4] (En afhandling om tilføjelser til tredje bog af *Elementerne* er desværre tabt.[5])

Al-Kūhīs udeladelse af konstruktioner fra første bog af *Elementerne* se ud til at afspejle et synspunkt om, at det at udføre geometriske konstruktioner og bevise geometriske sætninger er to forskellige aktiviteter og at *Data* er det passende redskab for det første og *Elementerne* for det andet. I deres konstruktioner (f.eks. "Om at trække to linjer") gjorde al-Kūhī og nogle af hans kolleger sig mindst lige så store anstrengelser i deres analyser som i de tilsvarende synteser, og somme tider undgik de fuldstændig de sidste. Det er således ikke spor overraskende, at al-Kūhīs største afhandling viet til Euklids værker er en samling på tredive sætninger som skal føjes til *Data,* selvom den særlige del af *Data* som al-Kūhī valgte at udvide, er temmelig overraskende, som vi skal se.

## *Data* og analyse

Euklids *Data* har fået en blandet modtagelse hos moderne forskere. Dens sætninger er beregnet til brug for analyse, og de fleste af dem svarer til sætninger i *Elementerne*. Imidlertid tyder deres forskellige formulering på forskellig anvendelse. For eksempel,

*Data* 29: Hvis en ret linje er givet i position og der på et givet punkt på den trækkes en linje som danner en given vinkel, er den rette linje givet i position.[6]

3. Se [Berggren/Van Brummelen 2005].
4. Se [DeYoung 1991-1992]. [Berggren/Van Brummelen 2002-2003] som bringer en kort relateret tekst som bekræfter at nogle af sætningerne var skrevet som lemmaer for at udfylde huller i beviserne i anden og tredje bog af *Keglesnit*.
5. [Sezgin 1974, 319]. (Biblioteket i Berlin har oplyst os om tabet af manuskriptet under Anden Verdenskrig.)
6. [Taisbak 2003, 102].

Udsagn af den art kan tolkes som forkortede udsagn om konstruktioner (i dette tilfælde *Elementerne* I.23), som kan fyldes ud, når analyse bliver til syntese. Som analyse blev praktiseret i det antikke Grækenland, var den en todelt proces, der begyndte med en **transformation** af et geometrisk problem til et andet, som man forventede at kunne behandle. Derefter dannede **løsningen** skelettet i konstruktionen af det nye problem, med et argument som lagde op til sætninger i *Data*, og endte med, at det ønskede objekt var givet. Det kunne hen ad vejen udvides til at danne en syntese. Fra dette synspunkt er *Data* ikke meget mere end en 'huskeseddel', som udtrykker de mest almindelige konstruktioner i *Elementerne* i kort form, og i så fald har forskere inden for græsk matematik været i deres gode ret til at gøre kort proces med den. Andre fortolkninger af udtrykket "givet" findes så tidligt som i det antikke Grækenland og i middelalderens Arabien. Det gælder især, at et objekt er givet, når det er fastslået, at det må eksistere i en eller flere mulige konfigurationer, hvilket er en bekræftelse af objektets eksistens.[7]

Analyse der indebærer argumenter om 'noget givet', er der mange af i arabisk matematik. Faktisk indeholder nogle arabiske værker udelukkende analyser og ingen transformationer, kun løsninger. (Al-Kūhī's "Om at trække to linjer fra et punkt i en kendt vinkel",[8] som vi refererede til før, er et eksempel på denne fremgangsmåde.) Derfor spillede arabiske analyser en vigtigere og måske anderledes rolle, end de havde gjort i Grækenland. Hertil kom, at ændringen af det græske ord 'givet' til det arabiske 'kendt' og en deraf følgende diskussion af betydningen af 'kendt' også antyder, at arabiske analyser måske blev opfattet anderledes end deres græske forgængere.[9]

7. Se for eksempel Marinos af Napolis kommentar, oversat i [Taisbak 2003, 241-249]. For arabiske eksempler på diskussioner af dette emne, se [Berggren/Van Brummelen 2000, 25-28].
8. [Berggren/Van Brummelen 2001].
9. Se for eksempel [Berggren 1983, 53-55; commentary p. 84]. Disse emner er behandlet i [Berggren/Van Brummelen 2000, 16-28].

## "Med en given større end i forhold" og Al-Kūhī's udvidelse

Ikke desto mindre undgik de fleste græske og arabiske analyser et mystisk afsnit af *Data* (sætningerne 10-21), hvor Euklid undersøger relationen "med en given [størrelse] større end i [et givet] forhold". En størrelse a siges at være "med en given større end i forhold" til en anden størrelse $b$ hvis der er en given størrelse, $z$, der kan fjernes fra $a$ sådan at resten $a - z$ har et givet forhold til $b$. (Vi vil, ifølge [Taisbak 2003], forkorte dette $a \ \delta >: b$.[10]) Euklid definerer også (men bruger aldrig) relationen "med en given mindre end i forhold", hvor a $\delta <: b$ hvis et givet $z$ eksisterer sådan at $(a + z) : b$ er givet. Under alle omstændigheder synes ingen af dem at have været brugt meget i græsk matematik.[11]

I nærværende afhandling, der ikke har noget navn, men som vi vil kalde *Tilføjelser til Data* (eller slet og ret *Tilfølelser*), etablerer al-Kūhī en naturlig udvidelse af udtrykkene "med en given større/mindre end i forhold". Det siges at en størrelse $a$ "sammen med en størrelse, hvis forhold til $b$ er kendt, er kendt" (som vi vil forkorte $a \ \epsilon <: b$), hvis der er en størrelse $z$, sådan at $a + z$ og $z : b$ er kendte.[12] Udtrykket er så malende, at en formel definition egentlig ikke er krævet, og al-Kūhī giver ikke nogen. De fleste af al-Kūhīs 30 sætninger beskæftiger sig med relationen $\epsilon <:$ og dens interaktioner med relationen $\delta >:$ .

Sætningerne har en dobbeltnummerering i begge overleverede håndskrifter, hvilket synes at antyde, at al-Kūhī oprindeligt satte sine sætninger i mellem sætningerne i *Data*. Der er præcedens for dette; al-Kūhī reviderede og tilføjede andre steder

10. [Taisbak 2003, 58].
11. Man kan dog til Apollonios' brug af konceptet citeret i [Taisbak 2003, 59], tilføje dets brug hos Diophant, *Arithmetica* II 7, og Pappos, *Synagoge* III umiddelbart efter sætning 35.
12. Der er ikke behov for en $\epsilon >:$ relation, for hvis den defineres naturligt, er den ækvivalent med $\delta >:$ . Givet $a \ \epsilon <: b$, lad $z$ være den $\epsilon >:$ krævede størrelse. Så vil $a - z$ opfylde $z$'s rolle ved definitionen af $\delta >:$ . Tilsvarende, hvis $a \ \delta >: b$, og $z$ den størrelse der er krævet af $\delta >:$ , så vil $a - z$ opfylde $z$'s rolle i definitionen af $\epsilon >:$ .

sætninger til de to første bøger af *Elementerne*.[13] Vi skal herefter referere til sætningerne med begge numre; f.eks. betyder sætning 1/9 den første sætning i al-Kūhīs tilføjelser og den niende sætning i hans udvidede version af *Data*. Tilføjelserne er alle inspireret af sætninger i selve *Data* og falder i følgende grupper:

1. Sætning 1/9: Et grundlæggende resultat som hører til første afsnit af *Data* (1-9, 22-24).
   (udvidelse af *Data* 22)
2. Sætningerne 3/16, 10/30: Rækker af *a*, *b*, *c* relateret af $\delta >:$ eller $\epsilon <:$ til nye størrelser *d*, *e*, *f* med kendte forhold
   (er parallel med *Data* 9)
3. Sætningerne 4/24, 5/25: Refleksivitet af $\delta >:$, $\delta <:$ og $\epsilon <:$.
4. Sætningerne 6/26, 7/27: *Componendo/subtrahendo* relationer
   (som I *Data* 10, 11)
5. Sætningerne 2/14, 8/28, 9/29: Transitivitet af $\delta >:$ og $\epsilon <:$ med kendte forhold
   (som i *Data* 13)
6. Sætningerne 11/32, 12/33, 19/40 – 30/51: Fra to kendte størrelser og to andre størrelser som er relateret til hinanden af $\delta >:$ , $\delta <:$ og $\epsilon <:$ , bestemmer relationer mellem disse størrelsers summer og differenser.
   (som i *Data* 14-16, 20, 21)
7. Sætningerne 13/34 – 18/39: Kombinerer tre størrelser med to relationer ($\delta >:$, $\delta <:$ eller $\epsilon <:$) (som i *Data* 17, 18), og kulminerer i dobbelttransitiviteten af $\epsilon <:$ (*Data* 19)

Ud fra de ovenfor nævnte tætte paralleller med sætninger fra *Data*[14] er det klart, at al-Kūhī mente at være i gang med at udvide resultaterne i *Data*, dog uden at afvige fra traditionen. Desuden er enhver sætning i *Tilføjelser* (bortset fra den løsrevne Sætning

13. Al-Kūhīs revision af Bog II (i [DeYoung 1991-1992]) omformulerer de første ti sætninger og føjer sytten flere til. Han revision af Bog I (i [Berggren/Van Brummelen 2005]) er meget mere ambitiøs, idet den fjerner de geometriske konstruktioner og reviderer den logiske rækkefølge.
14. Bortset fra sætningerne om refleksivitet som Euklid ikke under nogen omstændigheder kunne have inkluderet, fordi $\delta >:$ ikke er refleksiv.

1) en udvidelse af sætningen i afsnittet i *Data* om "givet større end i forhold",[15] hvilket antyder at al-Kūhī foretog en gennemgribende udforskning af emnet (særligt hans nye relation $\epsilon<:$), og på alle stadier fik inspiration fra selve *Data*.

### *En fremstilling med moderne notation og kommentar*

Påstandene er i geometrisk form, og ved at vende dem til algebraisk terminologi løber man risikoen for at ændre deres betydning og forlede en til at glemme, at geometriske størrelser ikke kan have negative værdier og nulværdier. Ikke desto mindre, da en fremstilling udelukkende i ord gør det vanskeligt for en moderne læser at følge argumenterne, giver vi først en algebraisk fremstilling af *Tilføjelser*, som forholder sig så tro som muligt til al-Kūhī's tekst. Vi giver også en oversættelse af en række af sætningerne, sådan at læseren kan sammenligne de algebraiske formuleringer med al-Kūhīs påstande.

Al-Kūhī refererer aldrig til de sætninger, som han bruger for at understøtte argumenterne i sine beviser, selvom enhver slutning bygger på en sætning fra enten *Data* eller *Tilføjelser*. I vores fremstilling har vi tilføjet referencer til disse sætninger. Adskillige grundlæggende resultater fra den tidlige del af *Data* (der drejer sig om størrelser her symboliseret ved $a, b, c$) er hyppigt brugt; disse er:

*Data* 2: Hvis $a$ er kendt og $a : b$ er kendt, så er $b$ kendt.

*Data* 3: Hvis $a$ og $b$ er kendte, så er $a + b$ kendt.

*Data* 4: Hvis $a$ og $b$ er kendte, så er $a - b$ kendt.

*Data* 5: Hvis $a : b$ er kendt og $b$ er en del af $a$, så er $a : (a - b)$ kendt.

*Data* 6: Hvis $a : b$ er kendt, så er $(a + b) : a$ og $(a + b) : b$ kendt.

*Data* 8: Hvis $a : b$ og $c : b$, så er $a : c$ kendt.

15. *Data* 12 beskæftiger sig ikke med "givet større end i forhold", og hører ikke til i dette afsnit.

(Da vi refererer til arabiske tilføjelser til den arabiske oversættelse af *Data*, bruger vi det arabiske ord “kendt” i stedet for “givet”.)

**Sætning 1/9:** Hvis der er flere størrelser og forholdene mellem hver af disse og en anden størrelse er kendt, så er forholdet mellem summen af de flere størrelser og den anden kendt.

**Bevis:** Lad $a$, $b$ og $c$ være størrelser, hvis forhold til størrelsen $z$ er kendt. Ifølge *Data* 8 er $a : b$ kendt og derfor (ifølge *Data* 6) er $(a + b) : b$ kendt. Men $b : z$ er kendt; derfor er (ifølge *Data* 8) $(a + b) : z$ kendt. På den anden side er $c : z$ kendt og derfor er (ifølge *Data* 8) $(a + b) : c$ kendt. Heraf er (ifølge *Data* 6) $(a + b + c) : c$ kendt. Endvidere er $c : z$ kendt, og derfor er (ifølge *Data* 8) $(a + b + c) : z$ kendt.

Dette er en udvidelse af *Data* 22, fra to til flere størrelser.

**Sætning 2/14:** Hvis $a$ δ>: $b$ og $b : c$ er kendt, så er a δ>: $c$ .

**Bevis:** Hvis $z$ er den kendte del som skal fjernes fra $a$, så er $(a - z) : b$ kendt. Men $b : c$ er kendt og derfor er (ifølge *Data* 8) $(a - z) : c$ kendt. Heraf er $a$ δ>: $c$.

Denne sætning er analog med *Data* 13; Transitiviteten af relationen δ>: med den “givne forhold” relation er anvendt på højre side af δ>: relationen, snarere end på den venstre.

**Sætning 3/16:** Hvis $a$ δ>: $b$ og $b$ δ>: $c$ og forholdene $a : d$, $b : e$ og $c : z$ er kendte, så er $d$ δ>: $e$ og $e$ δ>: $z$ .

**Bevis:** Da $a$ δ>: $b$ og $a : d$ er kendte har vi ifølge *Data* 13, at $d$ δ>: $b$ ;[16] men $b : e$ er også kendt så ifølge sætning 2/14 har vi $d$ δ>: $e$ . På samme måde kan vi etablere $e$ δ>: $z$ .

16. Den her anførte relation er ikke klart udtrykt.

Sammenlign med *Data* 9, som fastslår et fuldstændigt tilsvarende resultat, men for kendte forhold snarere end relationen $\delta{>}{:}$ . Se også Sætning 10/30 for den samme påstand men med relationen $\epsilon{<}{:}$ . Parallellen til *Data* 9 kan forklare, hvorfor påstandene i begge sætninger 3/16 og 10/30 indeholder redundanser (konstruktionen at $e \; \delta{>}{:} \; z$ er unødvendig; derfor er der ingen grund til at henvise til c eller z overhovedet).

**Sætning 4/24:** Hvis $a \; \delta{>}{:} \; b$ ; så $b \; \delta{<}{:} \; a$ .

**Bevis:** Lad $z$ være den kendte del som skal fjernes fra $a$; så er $(a - z) : b$ kendt. Læg nu $y$ til $b$ sådan at $\frac{(b+y)}{a} = \frac{b}{(a-z)}$. Da sidstnævnte forhold er kendt, så er $(b + y) : a$ også kendt. Derfor er $b \; \delta{<}{:} \; a$ , da $(b + y) : a$ er kendt og $y$ er kendt (for ved at fratrække tællerne og nævnerne i forholdsligheden ovenfor, så bliver resultatet $y : z$ kendt; og $z$ er kendt).

Her tillader al-Kūhī for første gang "givet større end i forhold" at interagere med "givet mindre end i forhold", som er defineret i *Data* men aldrig brugt. Husk at $b \; \delta{<}{:} \; a$ hvis $b$ er mindre med en kendt del $y$, end en anden størrelse, og at $(b + y) : a$ er kendt. Han beviser aldrig det modsatte, hvilket medfører et irritationsmoment i Sætning 23/44.

Her og senere antager al-Kūhī eksistensen af en fjerdeproportional i det tilfælde, hvor tre af fire størrelser i et forhold er specificeret. Selvom det ikke er indlysende for alle geometriske størrelser, var dette normal praksis i både Grækenland og Arabien.[17]

Al-Kūhī udelader argumentet i parentes, som beviser at y er kendt, en atypisk udeladelse.

17. Se diskussionerne i [Mueller 1981, 139] og [Taisbak 2003, 40].

**Sætning 5/25:** Hvis $a\ \epsilon{<}{:}\ b$, så $b\ \epsilon{<}{:}\ a$ .

**Sætning 6/26:** (i) Hvis $a\ \epsilon{<}{:}\ b$ (hvor størrelsen som skal lægges til $a$ ikke er $b$), så enten $(a + b)\ \epsilon{<}{:}\ b$ eller $(a + b)\ \delta{>}{:}\ b$ . (ii) Hvis $(a + b)\ \epsilon{<}{:}\ b$, så $a\ \epsilon{<}{:}\ b$.

**Sætning 7/27:** Hvis $a\ \epsilon{<}{:}\ b$ (hvor størrelsen der skal lægge til $a$ ikke er $b$), så enten $a\ \delta{<}{:}\ (a + b)$ eller $a\ \epsilon{<}{:}\ (a + b)$.

**Bevis:** Lad $z$ være størrelsen krævet af relationen $\epsilon{<}{:}$ .
Antag $z > b$.[18] Nu, da $z : b$ er kendt, så er (ifølge *Data* 5) $z : (z - b)$ kendt.

Vælg $y$ sådan at $\frac{a}{y} = \frac{z}{z-b}$.[19] Da det sidste er kendt, er det første det også, og derfor er også deres "komposition" $(a + z) : (z + y - b)$ kendt. Men da $a + z$ er kendt per definition, er $z + y - b$ kendt ifølge *Data* 2. Så er (ifølge *Data* 4, ved at trække denne fra den kendte $a + z$), $a + b - y$ kendt. Derfor er $(a + b)\ \delta{>}{:}\ a$ (hvor $a + b - y$ er størrelsen krævet af relationen $\delta{>}{:}$ ). Så er (ifølge Sætning 4/24) $a\ \delta{<}{:}\ (a + b)$.[20]

Antag på den anden side, at $z < b$ . Da $z : b$ er kendt, så er (ved kombination af *Data* 5 og 8) $z : (b - z)$ kendt. Vælg $y$ sådan at $\frac{a}{y} = \frac{z}{b-z}$.[21] Da sidstnævnte forhold er kendt, så er det første det også, og ved "komposition" er $\frac{a+z}{y+b-z}$ kendt. Men $a + z$ er kendt, så er (ifølge *Data* 2) $y + b - z$ også kendt. Derfor er (ved sammenlægning) $a + b + y$ kendt. Endvidere er $y : a$ kendt; derfor er $(a + b)\ \epsilon{<}{:}\ a$ . Derfor er (ifølge Sætning 5/25) $a\ \epsilon{<}{:}\ (a + b)$.[22]

I begge manuskripter er figurerne tegnet i den omvendte orden af deres anvendelse i beviset.

18. Al-Kūhī skriver faktisk $a + z > a + b$.
19. Denne sætning i beviset er rekonstrueret; der er en lakune i teksten.
20. En marginalnote i AS 4830 bekræfter brugen af Sætning 4.
21. Der er endnu en lakune her; forholdet er rekonstrueret.
22. Brugen af Sætning 5 er bekræftet af en marginalnote i AS 4830.

**Sætning 8/28:** Hvis $a \epsilon<: b$ og $b : c$ er kendt, så er både $a \epsilon<: c$ og $c \epsilon<: a$ .

**Sætning 9/29:** Hvis $a : b$ er kendt og $b \epsilon<: c$ , så er både $a \epsilon<: c$ og $c \epsilon<: a$ .

**Sætning 10/30:** Antag at $a \epsilon<: b$ og $b \epsilon<: c$, og $a : d$ , $b : e$ og $c : z$ alle er kendte. Så er $d \epsilon<: e$ og $e \epsilon<: z$ .

**Sætning 11/32:** Antag at $a$ og $b$ er kendte, og at $c : d$ er kendt. Så er $(a - c) \epsilon<: (b + d)$ .

**Sætning 12/33:** Antag at $a$ og $b$ er kendte, og at $c : d$ er kendt. Så er $(c - a) \epsilon<: (b - d)$ og $(b - d) \epsilon<: (c - a)$ .

**Sætning 13/34:** Antag at $a \epsilon<: c$ og $b \epsilon<: c$. Så er enten $a : b$ kendt, eller $a \delta>: b$ eller $b \delta>: a$ .

**Sætning 14/35:** Antag at $a \epsilon<: b$ og $a \epsilon<: c$. Så er enten $b : c$ kendt, eller $b \delta>: c$ eller $c \delta>: b$ .

**Sætning 15/36:** Antag at $a \epsilon<: b$ og $b \epsilon<: c$. Så er enten $a : c$ kendt, eller $a \delta>: c$ eller $c \delta>: a$.

**Sætning 16/37:** Antag at $a \delta>: b$ og $b \epsilon<: c$ . Så er $a \epsilon<: c$ (og omvendt).

**Sætning 17/38:** Antag at $a \epsilon<: b$ og $b \delta>: c$ . Så er $a \epsilon<: c$ (og omvendt).

**Sætning 18/39:** Antag at $a \epsilon<: b$ , $b \epsilon<: c$ og $c \epsilon<: d$ . Så er $a \epsilon<: d$ .

**Bevis:** Af sætning 15/36 er enten $a : c$ kendt, eller $a \delta>: c$ eller $c \delta>: a$ . I det første tilfælde giver sætning 9/29 resultatet; i det andet tilfælde giver sætning 16/37 det; i det tredje giver sætning 17/38 det.

Faktisk refererer teksten ikke direkte til det tredje tilfælde, men den ellers uudnyttede sætning 17/38 umiddelbart ovenfor antyder, at al-Kūhī var opmærksom på det tredje tilfælde og nødvendigheden af at løse det.

Denne sætning er højdepunktet af en udvidet undersøgelse af resultater relateret til transitiviteten af relationen $\epsilon\!<:$ . Det er bemærkelsesværdigt at $\epsilon\!<:$ ikke altid er transitiv gennem den sædvanlige følge af to relationer,[23] men er transitiv gennem tre. Selvom al-Kūhī ikke direkte behandler ikke-transitivitet gennem en følge af to relationer, antyder rækken af sætninger, som leder frem til dette, kraftigt, at han var opmærksom på dette.

**Sætning 19/40:** Antag at $a$ og $b$ er kendte, og at $c\ \delta\!>:\ d$ . Så er enten $(a + c) : (b + d)$ kendt eller $(a + c)\ \delta\!>:\ (b + d)$ , eller omvendt.

**Sætning 20/41:** Antag at $a$ og $b$ er kendte, og at $c\ \epsilon\!<:\ d$ . Så er $(a + c)\ \epsilon\!<:\ (b + d)$ .

**Sætning 21/42:** Antag at $a$ og $b$ er kendte, og at $c\ \delta\!>:\ d$ . Så er enten $(a - c) : (b - d)$ kendt, eller $(a - c)\ \delta\!>:\ (b - d)$ eller $(b - d)\ \delta\!>:\ (a - c)$ .

**Sætning 22/43:** Antag at $a$ og $b$ er kendte, og at $c\ \epsilon\!<:\ d$ . Så er $(a - c)\ \epsilon\!<:\ (b - d)$ .

**Sætning 23/44:** Lad $a\ \delta\!>:\ b$ og lad $c$ og $d$ være kendte. Så er enten $(a - c) : (b - d)$ kendt eller $(a - c)\ \delta\!>:\ (b - d)$ eller $(a - c)\ \epsilon\!<:\ (b - d)$.

23. Det er ikke trivielt at vise dette, fordi det at bevise, at en bestemt relation *ikke* er opfyldt kræver en anden type bevis end al-Kūhī har brugt frem til nu. En måde at bevise det, er som følger: Antag at to-trins transitivitet gælder. Hvis vi, af sætning 5/25, har $a$, $b$ sådan at $a\ \epsilon\!<:\ b$ , så er $b\ \epsilon\!<:\ a$ , og af transitivitet er $a\ \epsilon\!<:\ a$ . Vi kan altså modbevise transitivitet, hvis vi kan finde $a$, sådan at $\cancel{a\ \epsilon\!<:\ a}$, men $a\ \epsilon\!<:\ b$ for mindst en anden størrelse $b$. Antag at de kendte størrelser er de (positive) algebraiske længder, og at $a = \pi$. Hvis $a\ \epsilon\!<:\ a$ , så må der findes en længde $z$ som er et (positiv) algebraisk multiplum af $\pi$, som hvis det lægges til $\pi$, frembringer et algebraisk tal. Men hvis $z = r\pi$ ($r$ algebraisk), så er $a + z = \pi + r\pi = (1 + r)\pi$, som ikke kan være algebraisk. Så $\cancel{a\ \epsilon\!<:\ a}$. Men der er en størrelse $b$, sådan at $a\ \epsilon\!<:\ b$, nemlig $4 - \pi$ : for hvis vi lader $z = 4 - \pi$, er både $a + z$ og $z/b$ rationale.

**Bevis:** Lad $z$ være størrelsen krævet af relationen $\delta>:$ ; så er $(a - z) : b$ kendt. På den anden side, da $z$ og $c$ er kendte, så er (af *Data* 4) også $c - z$ (eller $z - c$, afhængig af hvilken der er størst) kendt. Derfor, hvis $z < c$, så er (af *Data* 15) enten $((a - z) - (c - z)) : (b - d) = (a - c) : (b - d)$ kendt, eller $(a - c)\ \delta>:\ (b - d)$ . Men hvis $z > c$, så er af sætning 11/32 (se kommentaren nedenfor) $((a - z) + (z - c))\ \epsilon<:\ (b - d)$ , så $(a - c)\ \epsilon<:\ (b - d)$).

Endelig, hvis $c = z$ , så er $(b - d)\ \delta<:\ (a - c)$ pr. definition (den relevante kendte størrelse er $d$, da $(a - z) : b = (a - c) : b$ er kendt), og så er (af den ***omvendte*** af sætning 4/24) $(a - c)\ \delta>:\ (b - d)$ .

> Al-Kūhī begår to mindre fejl her. For det første skulle hans anvendelse af sætning 11/32 resultere i $(a - c)\ \epsilon<:\ (d - b)$ , ikke $(b - d)$ . For det andet anvender han den omvendte til sætning 4/24, som aldrig bevises. Vi kan forklare denne situation velvilligt ved at antage, at al-Kūhī både havde den passende variant af sætning 11/32 og den omvendte til sætning 4/24, da han arbejdede på dette bevis, men at de af en eller anden grund ikke kom med i den endelige afhandling.

**Sætning 24/45:** Lad $a\ \epsilon<:\ b$ og lad $c$ og $d$ være kendte. Så er $(a - c)\ \epsilon<:\ (b - d)$ (og omvendt).

**Sætning 25/46:** Lad $a$ og $b$ være kendte og lad $c\ \delta>:\ d$ . Så er $(a + c)\ \epsilon<:\ (b - d)$ (og omvendt).

**Sætning 26/47:** Antag at $a\ \delta>:\ b$ og at $c$ og $d$ er kendte. Så er $(a + c)\ \epsilon<:\ (b - d)$ (og omvendt).

**Sætning 27/48:** Antag at $a\ \delta>:\ b$ og at $c$ og $d$ er kendte. Så er $(a + c)\ \delta>:\ (b - d)$.

**Sætning 28/49:** Antag at $a\ \epsilon<:\ b$ og at $c$ og $d$ er kendte. Så er $(a + c)\ \epsilon<:\ (b - d)$ (og omvendt).

**Sætning 29/50:** Lad $a$ og $b$ være kendte, og lad $c\ \delta{>}{:}\ d$ . Så er $(c - a)\ \epsilon{<}{:}\ (b - d)$.

**Sætning 30/51:** Lad $a$ og $b$ være kendte, og lad $c\ \epsilon{<}{:}\ d$. Så er enten $(c - a)\ \delta{>}{:}\ (b - d)$ eller $(b - d)\ \delta{>}{:}\ (c - a)$ , eller $(c - a) : (b - d)$ er kendt.

**Bevis:** Da $c\ \epsilon{<}{:}\ d$ , så er (af sætning 5/25) $d\ \epsilon{<}{:}\ c$ . Lad $z$ være størrelsen krævet af den sidste $\epsilon{<}{:}$ relation. Lad først $z < b - d$ . Så er $z : c$ kendt. På den anden side, da $b$ og $d + z$ er kendte, er (af *Data* 4) $b - (d + z)$ det også. Derfor er (af *Data* 16) $(b - d)\ \delta{>}{:}\ (c - a)$. Lad nu $z > b - d$. Så er $z : c$ kendt, og (da både $d + z$ og $b$ er kendte af *Data* 4) $d + z - b$ er kendt. Så er (af *Data* 15) enten $(z - (d + z - b)) : (c - a) = (b - d) : (c - a)$ eller $(b - d)\ \delta{>}{:}\ (c - a)$, eller $(c - a)\ \delta{>}{:}\ (b - d)$.

> Bemærk at al-Kūhī ikke behandler tilfældet $z = b - d$; ligesom han ikke nævner det i sætningens formulering, som han før har gjort.

*Oversættelse*

Vores oversættelse af teksten er baseret på de to kendte afskrifter af værket: Istanbul (Sÿleymaniye Library) manuskript nr. AS 4830 og AS 4832. Runde parenteser indeholder henvisning til sidetal i manuskriptet; skarpe parenteser indeholder vores rekonstruktion af teksten. Vores translitterationssystem, der refererer til punkter i figurerne, følger [Kennedy 1991/91]. Vi har planer om på et senere tidspunkt at publicere en udgave af teksten og en fuldstændig oversættelse. Vi mener dog, at den 'moderne' fremstilling ovenfor sammen med den følgende oversættelse af udvalgte dele af afhandlingen vil give læseren en god fornemmelse af, hvad teksten siger og hvordan den gør det.

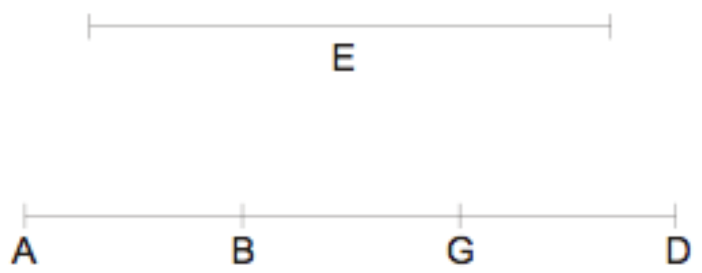
I Guds, den Barmhjertiges og Medlidendes Navn

(Jeg søger hjælp fra Gud)

1 (9). Hvis der findes flere størrelser, og forholdet mellem enhver af dem til en anden er kendt, så er forholdet mellem dem alle og denne størrelse kendt.

Lad forholdet mellem enhver af AB, BG, GD og E være kendt. Jeg siger: Forholdet mellem AD og E er kendt.

Bevis: Forholdet mellem enhver af AB, BG, GD og E er kendt. Derfor er forholdet mellem AB og BG kendt, og forholdet mellem AG og BG er kendt. Men forholdet mellem BG og E er kendt. Derfor er forholdet mellem AG og E kendt. På den anden side: Forholdet mellem GD og E er kendt, derfor er forholdet mellem AG og GD kendt. Derfor er forholdet mellem AD og DG kendt. Endvidere er forholdet mellem DG og E kendt; derfor er forholdet mellem AD og E kendt. Og det var, hvad vi ville bevise.

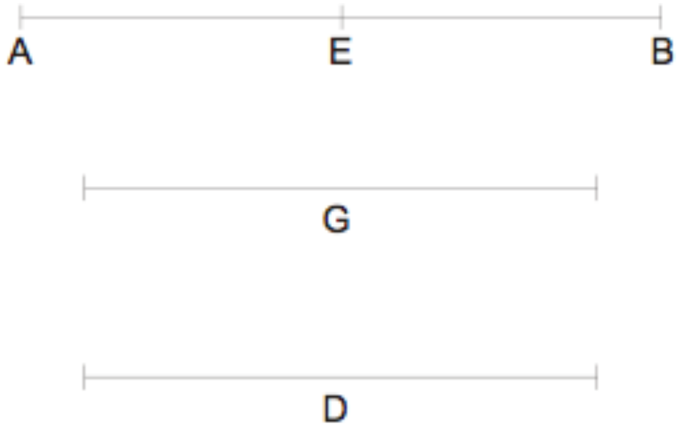



**Figur 1**

2 (14). Hvis der er tre størrelser, og den første, med en kendt del, er større end den størrelse, hvis forhold til den anden er kendt, og forholdet mellem den anden og den tredje er kendt, så er den første, med en kendt del, større end en størrelse, hvis forhold til den tredje er kendt.

Lad der nu være størrelserne AB, G og D. Og AB er, med en kendt del, større end en størrelse, hvis forhold til G er kendt, og forholdet mellem G og D er kendt. Jeg siger: AB er, med en kendt del, større end en størrelse, hvis forhold til D er kendt.

Bevis: Fra AB tager vi den kendte del, dvs. AE. Derfor er forholdet mellem den resterende EB og G kendt. På den anden side er forholdet mellem G og D kendt, derfor er forholdet mellem EB og D kendt. Derfor er AB, med en kendt del som er AE, større end størrelsen EB, hvis forhold til D er kendt. Og det var, hvad vi ville bevise.

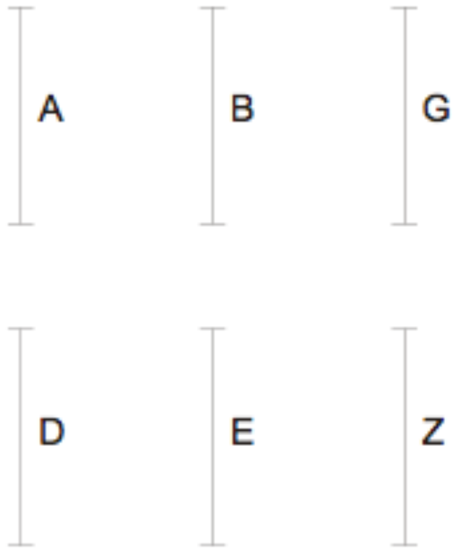



**Figur 2**

3 (16). Hvis der er flere størrelser, og hver af dem, med en kendt del, er større end en størrelse, hvis forhold til den anden er kendt i rækkefølge, og forholdet mellem hver enkelt af dem og hver af de andre størrelser er kendt, så er enhver af de andre størrelser, med en kendt del, større end den størrelse, hvis forhold til den anden er kendt konsekutivt.

Lad størrelserne være A, B og G. A er, med en kendt del, større end en størrelse, hvis forhold til B er kendt, B er, med en kendt del, større end en størrelse, hvis forhold til G er kendt, og A's forhold til D, B's til E og G's til Z er kendt. Jeg siger: Størrelsen D er, med en kendt del, større end en størrelse, hvis forhold til E er kendt, og E er, med en kendt del, større end en størrelse, hvis forhold til Z er kendt.

Bevis: A's forhold til B er kendt, og A er, med en kendt del, større end en størrelse, hvis forhold til B er kendt. På den anden side er B's forhold til E kendt. Derfor er D, med en kendt del, større end en størrelse, hvis forhold til E er kendt. På samme måde er E, med en kendt del, større end en størrelse, hvis forhold til Z er kendt. Og det var, hvad vi ville bevise.

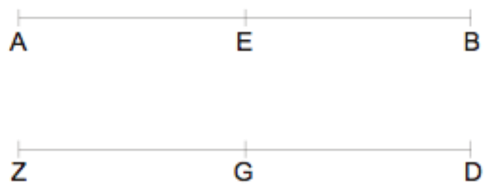



**Figur 3**

4 (24). Hvis der er to størrelser, og den ene af dem, med en kendt del, er større end en størrelse, hvis forhold til den anden er kendt, så er den anden størrelse, med en kendt del, mindre end en størrelse, hvis forhold til den første størrelse er kendt.

Lad der nu være to størrelser AB, GD, hvor AB, med en kendt del, er større end en størrelse, hvis forhold til GC er kendt. Jeg siger: GD er, med en kendt del, mindre end en størrelse, hvis forhold til AB er kendt.

Bevis: Vi tager fra AB den kendte størrelse, dvs. AE. Hvad der bliver tilbage, er størrelsen BE, hvis forhold til GD er kendt. Hvis vi nu skulle danne forholdet mellem DZ og det kendte A[B] som forholdet mellem GD og EB, hvilket [forhold] er kendt, så er forholdet mellem ZD og AB kendt. Derfor er størrelsen GD mindre end størrelsen ZD, hvis forhold til AB er kendt. Derfor er størrelsen GD mindre end størrelsen ZD, hvis forhold til AB er kendt, med en kendt del, dvs. ZG. Og det var, hvad vi ville bevise.



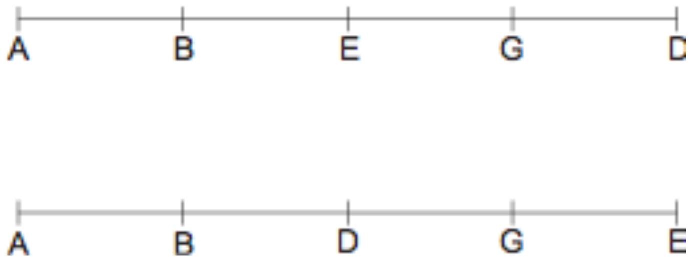

**Figur 4**

Vi udelader oversættelsen af sætningerne 5 og 6.

7 (27) Hvis der er to størrelser, og en af dem (plus en størrelse, hvis forhold til den anden størrelse er kendt og ikke er et lighedsforhold) er kendt, så vil denne størrelse enten, med en kendt del, være mindre end en størrelse, hvis forhold til dem alle er kendt, eller også er den plus en størrelse, hvis forhold til dem alle er kendt, kendt.

Lad nu de to størrelser være AB, BG. Og AB (plus en størrelse, hvis forhold til BG er kendt) er kendt. Jeg siger: AB er enten, med en kendt del, mindre end en størrelse, hvis forhold til AG er kendt, eller også er den plus en størrelse, hvis forhold til AG er kendt, kendt.

Bevis: Lad den kendte størrelse først og fremmest være større end AG, dvs. AD. Da forholdet mellem DB og BG er kendt, er ved omvending forholdet mellem BD og DG kendt. Vi lader nu forholdet mellem AB og GE være [ligesom forholdet mellem BD og DG]. Derfor er forholdet mellem AD, som er kendt, og DE kendt. Følgelig er størrelsen af DE kendt. Derfor er AE kendt. Derfor er AG større end GE, hvis forhold til AB er kendt, med størrelsen af AE, som er kendt. Følgelig er AB, med en kendt del, mindre end en størrelse, hvis forhold til AG er kendt. På den anden side, hvis den kendte størrelse er AD, som er mindre end AG, så vil, da forholdet mellem DB og BG er kendt, forholdet mellem BD og DG være kendt gennem fradrag. Og hvis vi ville lade [forholdet mellem BD og DG] være ligesom forholdet mellem AB og GE, så vil forholdet mellem AD, som er kendt, og DE være kendt. Derfor er DE kendt. Følgelig er AE kendt. Endvidere er forholdet mellem GE og AB kendt. Følgelig er AG (plus GE, hvis forhold til AB er kendt) kendt. Derfor er AB (plus en størrelse, hvis forhold til AG er kendt) kendt. Derfor er AB enten, med en kendt del, mindre end den størrelse, hvis forhold til AG er kendt eller (plus en størrelse, hvis forhold til den er kendt) kendt. Og det var, hvad vi ville bevise.




**Figur 7**

Vi udelader oversættelsen af sætningerne 8-17.

18 (39) Hvis der er fire størrelser, og den første (plus en størrelse, hvis forhold til den anden er kendt) er kendt, og den anden (plus en størrelse, hvis forhold til den tredje er kendt), og en tredje (plus en størrelse, hvis forhold til den fjerde er kendt) er kendt, så er den første (plus en størrelse, hvis forhold til den fjerde er kendt) kendt.

Lad størrelserne være givet som A, B, G og D. Og A (plus en størrelse, hvis forhold til B er kendt) er kendt. B (plus en størrelse, hvis forhold til G er kendt) er kendt og G (plus en størrelse, hvis forhold til D er kendt) er kendt. Jeg siger: A (plus en størrelse, hvis forhold til D er kendt) er kendt.

Bevis: A (plus en størrelse, hvis forhold til B er kendt) er kendt, B (plus en størrelse, hvis forhold til G er kendt) er kendt; følgelig er forholdet mellem A og G enten kendt eller også er A, med en kendt del, større end den størrelse, hvis forhold til G er kendt. Endvidere er G (plus en størrelse, hvis forhold til D er kendt) kendt. Og det var, hvad vi ville bevise.

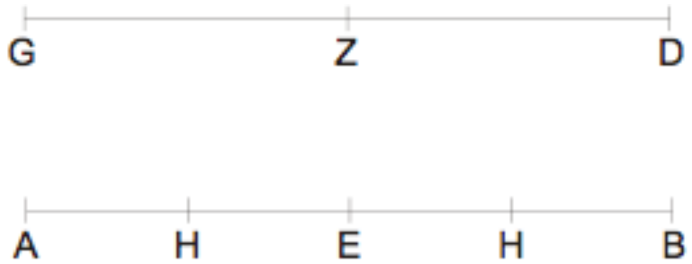

**Figur 18**

Vi udelader sætningerne 19-22.

23 (44). Hvis der er to størrelser, og en af dem, med en kendt del, er større end en størrelse, hvis forhold til den anden er kendt, og der fra hver af dem tages en kendt størrelse, så er forholdet mellem den ene af de resterende størrelser til den anden enten kendt eller også er en af dem, med en kendt del, større end en størrelse, hvis forhold til den anden er kendt, eller også er en af de to resterende størrelser (plus en størrelse, hvis forhold til den anden er kendt) kendt.

Lad nu de to størrelser være AB, GD. Og AB, med en kendt del, er større end en størrelse, hvis forhold til GD er kendt. Fra hver af dem tager vi en kendt størrelse, dvs. AE og GZ. Jeg siger: Forholdet mellem BE og ZD er enten kendt, eller også er BE, med en kendt del, større end en størrelse, hvis forhold til ZD er kendt, eller også er den (plus en størrelse, hvis forhold til ZD er kendt) kendt.

Bevis: Da AB, med en kendt del, er større end en størrelse, hvis forhold til GD er kendt, tager vi fra AB den kendte del, dvs. AH. Følgelig er forholdet mellem den resterende HB og GD kendt. På den anden side, da hver af størrelserne AH, AE er kendt, og forskellen mellem dem, dvs. EH er kendt, og GD er kendt, så er derfor, hvis nu AH var mindre en AE, forholdet mellem BE og ZD enten kendt, eller også er en af dem, med en kendt del, større end en størrelse, hvis forhold til den anden er kendt, fordi to kendte størrelser blev trukket fra to størrelser, hvis forhold til hinanden er kendt. Hvis nu den var større, så er BE (plus en størrelse, hvis forhold til ZD er kendt) kendt. På den anden side, hvis den var lig med, så vil DZ, være mindre end ZG, hvis forhold til EB er kendt, med en kendt del, dvs. GZ. Derfor er EB også, med en kendt del, større end en størrelse, hvis forhold til ZD er kendt. Og det var, hvad vi ville bevise.




**Figur 23**

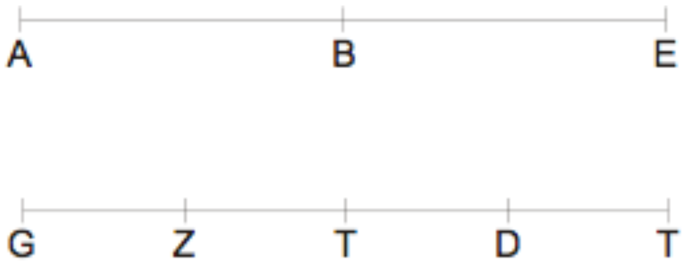
Vi udelader sætningerne 24-29.

30 (51) Hvis der er to kendte størrelser, og en af dem tages fra en størrelse (hvis forhold til en størrelse taget fra den anden er kendt) er kendt, så vil en af de to resterende størrelser enten, med en kendt del, være større end en størrelse, hvis forhold til den anden er kendt, eller også vil forholdet mellem den ene og den anden af dem være kendt.

Lad nu de to kendte størrelser være AB, GD, og AB er taget fra AE, som (plus en størrelse, hvis forhold til GZ, som er taget fra den anden, er kendt) er kendt. Jeg siger: En af størrelserne BE, ZD vil enten, med en kendt del, være større end en størrelse, hvis forhold til den anden er kendt, eller også er forholdet mellem den ene og den anden af dem kendt.

Bevis: Da EA (plus en størrelse, hvis forhold til GD er kendt) er kendt, er GD (plus en størrelse, hvis forhold til AE er kendt) kendt.

Lad nu størrelsen være ZT. Og lad den først være mindre end ZD. Følgelig er forholdet mellem ZT og AE kendt. På den anden side er DT kendt, fordi hver af GD, GT er kendt. Endvidere, da forholdet mellem ZT og AE er kendt, og der til ZT er lagt den kendte størrelse TD, og fra AE er trukket den kendt størrelse AB, så er hele ZD, med en kendt del, større end en størrelse, hvis forhold til det resterende, dvs. BE, kendt. Endvidere, hvis ZT nu var større end ZD, så vil, eftersom forholdet mellem ZT og AE er kendt, og TD, AB som er kendte, er taget fra hver af dem, forholdet mellem det resterende DZ og det resterende BE derfor enten være kendt, eller også den enes forhold, med en kendt del, være større end en størrelse, hvis forhold til den anden er kendt. Og det var, hvad vi ville bevise.




**Figur 30**

*Tak*

Hjertelig tak for hjælpen fra følgende personer: Professor Fuat Sezgin for at fremskaffe kopier af manuskripterne til afhandlingen; A.A. Hannawi for hans hjælp ved forberedelsen af den præliminære udgave af den arabiske tekst og den præliminære oversættelse; og professor Jan Hogendijk for at kontrollere adskillige marginalnoter skrevet af Ibn Sartāq i AS 4832.

Len Berggren: berggren@sfu.ca Glen Van Brummelen: gvb@questu.ca

## *Bibliografi*

Berggren, J. L. The correspondence of Abū Sahl al-Kūhī and Abū Isḥāq al-Ṣābī, *Journal for the History of Arabic Science* 7 (1983), 39-123.

Berggren, J. L.; and Van Brummelen, Glen R. The role and development of geometric analysis and synthesis in ancient Greece and medieval Islam, in P. Suppes, J. Moravcsik, and H. Mendell, eds., *Ancient and Medieval Traditions in the Exact Sciences: Essays in Memory of Wilbur Knorr*, Stanford, CA: CSLI Publications, 2000, pp. 1-31.

Berggren, J. L.; and Van Brummelen, Glen R. Abū Sahl al-Kūhī's "On drawing two lines from a point at a known angle", *Suhayl* **2** (2001), 161-198.

Berggren, J. L.; and Van Brummelen, Glen R. From Euclid to Apollonius: Al-Kūhī's lemmas to the *Conics*, *Zeitschrift für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften* **15** (2002-2003), 165-174.

Berggren, J. L.; and Van Brummelen, Glen R. Al-Kūhī's revision of Book I of Euclid's *Elements*, *Historia Mathematica* **32** (2005), 426-452.

DeYoung, Gregg. Abū Sahl's additions to Book II of Euclid's *Elements*, *Zeitschrift für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften* **7** (1991-1992), 73-135.

Hogendijk, Jan P. Discovery of an 11th-century geometrical compilation: The *Istikmāl* of Yūsuf al-Mu'taman ibn Hūd, King of Saragossa, *Historia Mathematica* **13** (1986), 43-52.

Kennedy, E. S. "Transcription of Arabic Letters in Geometric Figures", *Zeitschrift für*

*Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften* **7** (1991/92), 21-22.

McDowell, George L.; and Sokolik, Merle A., transl. *The Data of Euclid*, Baltimore: Union Square Press, 1993.

Mueller, Ian. *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements*, Cambridge, MA: MIT Press, 1981.

Sezgin, Fuat. *Geschichte des arabischen Shrifttums, vol. V. Mathematik*, Leiden: Brill, 1974.

Taisbak, Christian Marinus. *Euclid's Data: The Importance of Being Given*, Copenhagen: Museum Tusculanum Press, 2003.