Brede linier

En glemt geometrisk begrebsstruktur

af Jens Høyrup

Den følgende hilsen til Marinus følger sporene af en forståelse af arealer der for os synes mærkværdig (for Platon, som vi skal se, skandaløs) men som i flere matematiske kulturer har været så selvfølgelig at der ikke var brug for at forklare den: så mærkværdig, og så selvfølgelig at moderne historikere har besluttet at passager i kilderne der afspejler den er fejlagtige, forvirrede eller meningsløse. Jeg hentyder til forståelsen af linier som bærere af en virtuel bredde svarende til en længdeenhed, og af arealer som sammensatte af sådanne bånd-linier. Denne forståelse har behersket mange før-moderne praktiske landmålerkulturer, hvor det var let at enes om valget af en enkelt standardbredde – hvor, så at sige, land blev målt som vi i dag stadig sælger stof, i meter (med den fysisk bestemte bredde) og ikke i kvadratmeter. Men den afspejles også i tekster som er af mere teoretisk præg omend de stadig inspireres eller farves af den praktiske landmåling og dens sprogbrug. Ud fra et godt gammelt princip skulle temaet ligge nær på emner Marinus har arbejdet med, uden dog at sidde låret af ham.

Italiensk landmåling, fra Fibonacci til Pacioli

I indledningen til sin *Pratica geometrie* [ed. Boncompagni 1862: 3–4] gør Leonardo Fibonacci rede for længde- og arealmål. I de første linier [ed. Boncompagni 1862: 3–4] er der intet overraskende for en moderne læser: en *cubita superficialis* er et kvadrat hvis side er en *cubita linealis*; på samme måde er en *ulna superficialis* et kvadrat med side én *ulna linealis*, og en *pertica superficialis* et kvadrat med side én *pertica linealis*.

Men så fortsætter Fibonacci med en beskrivelse af det system der bruges i hans hjemby Pisa – og det er temmelig anderledes end vi er vant til.[1] En *pertica linealis* består af 6 lineære fod, og hver af disse af 18 lineære punkter eller *unciae*. En *pertica*

1. Fibonacci latiniserer lokale toskanske enheder; skønt disses navne er afledt fra latin er deres former derfor ikke altid hvad en filolog ville forvente.

quadrata består tilsvarende af 6 flade-fod; som Fibonacci forklarer, er nemlig en flade-fod 1 *pertica* lang og en sjettedel af en *pertica* (altså en fod) bred. En flade-*uncia* er en *pertica* lang og en attendedel af en fod bred. En flade-fod er altså en sjettedel af en flade-*pertica*, og en flade-*uncia* en attendedel af en flade-fod eller en 108-del af en flade-*pertica*.

Større arealer måles i enhederne *scala* (= 4 flade-*pertice*), *panorum* (= 5½ flade-*pertice*), *staiorum* (=12 *panori*) og *modiorum* (=24 *staiori*). De er alle først og fremmest arealmål, men de kan også forstås som længdemål – hvor 1 lineær *panorum* er den længde som, hvis den udstyres med en bredde på 1 fod, giver et areal på en flade-*panorum* (o.s.v.). De bruges, fortæller Fibonacci, ved køb og salg af marker, byggegrunde og huse – altså i praktisk økonomisk liv.

Tilsvarende forklarer den geometriske del af Luca Pacioli's *Summa de arithmetica, geometria, proportioni: et proportionalita* [1494: II, fols 6v–7r] det målesystem der på hans tid bruges i Firenze ved køb og salg af jord. Her er den tilbagevendende bredde *bracio* (flertal *bracia*; en "underarm med hånd" eller *cubitum* på ca. 50 cm):

Multiplikation af *bracia* med *bracia* giver kvadrat-*bracia*.

Multiplikation af *bracia* med *pugnora* giver *pugnora*.

Multiplikation af *bracia* med *panora* giver *panora*; multiplikation med *staiora* giver *staiora*.

...

(1 *staioro* = 12 *panora* = 12^2 *pugnora* = 12^3 *bracia*). Fremstillingens hele struktur så vel som målesystemet viser at denne passage (i modsætning til mange andre) ikke er kopieret fra Fibonacci. Pacioli beskriver et system der faktisk var i brug i Firenze på hans tid.

Ægypten

Forståelsen af arealer som sammensat af bånd med standardbredde og målt i længdemål kan findes i andre praktiske målesystemer. Et bekendt eksempel kommer fra det Midterste Riges Ægypten [Peet 1923: 24–25]. Til opmåling af land brugtes længdeenheden *khet* (et "reb"), med en længde på 100 *mḥ* (stadig en *cubitum* på ca. 50 cm). I skoletekster er den grundlæggende arealenhed *setat*, en kvadrat-*khet*. I praktisk landmåling brugtes derimod som oftest “en *mḥ* af land” eller “tusind af land”, rektangler hvis ene side var en *mḥ* henholdsvis 1000 *mḥ*, mens den anden var en *khet*.

Det målesystem Peet beskriver hører hjemme i den andet årtusinde f.v.t. Skønt den hellenistisk- og romersk-ægyptiske matematik var eklektisk og havde overtaget materiale af babylonisk, aramæisk og persisk oprindelse, så genfinder vi dog den struktur vi her betragter i de demotiske papyri. Således dukker “en *mḥ* af land” op i en papyrus fra romersk tid [ed. Parker 1972: 71]. Endnu mere bemærkelsesværdig er en passage fra den samme papyrus [ed. Parker 1972: 72] hvor *aroura* (den gamle *setat* eller kvadrat-*khet*) bruges som længdeenhed – ganske vist uden anførelse af navnet, men i denne periode eksisterede der ingen anden længdeenhed af denne størrelse.

Oldbabylonisk matematik

De “brede linier” afspejles mindre klart i det oldbabyloniske målesystem,[2] og af samme grund er deres tilstedeværelse som underliggende struktur i den almene matematiske tænkning ikke blevet bemærket. Derimod er der blevet skrevet ganske meget om en tilsvarende struktur for rummål. Vandrette afstande blev målt i NINDAN, en “stang” på 12 KÙŠ (også en KÙŠ er en *cubitum* på ca. 50 cm – en NINDAN er altså ca. tre gange en romersk *pertica*). Lodrette afstande blev derimod målt i KÙŠ. Volumina blev målt i arealmål, underforstået med en tykkelse på 1 (nemlig 1 KÙŠ). Volumina blev med andre ord opfattet som sammensat af skiver med tykkelse 1 KÙŠ.

For at se at den samme ide indgår i forståelsen af arealer må vi analysere den terminologi der blev brugt til at beskrive arealberegning. Blandt de termer der traditionelt oversættes som multiplikation synes to at være forbundet med sådanne beregninger [Høyrup 2002: 21–23]. Det ene (med forskellige synonymer) er *šutakūllum*, hvis betydning er at “lade [to liniestykker] holde” (nemlig holde et rektangel – jfr. *Elementer* II, def. 1 [ed. Heiberg 1883: 118]). Det andet er *našûm*, “at løfte”. I virkeligheden refererer *šutakūllum* ikke til beregningen men til *konstruktionen* af rektanglet (i overensstemmelse med ordets betydning). Sædvanligvis medfører konstruktionen en underforstået beregning af arealet (oldbabylonisk geometri handler altid om målelige størrelser). Der findes dog tilfælde hvor beregningen omtales separat, og andre hvor to liniestykker af

2. Den oldbabyloniske periode dækker tidsrummet 2000–1600 f.v.t. (ifølge “middelkronologien”; de matematiske tekster hører hjemme i periodens anden halvdel.

ukendt længde lades holde, og hvor det kun siges at en flade er blevet "bygget" (d.v.s. konstrueret). Beregningen af arealet af et rektangel der allerede er konstrueret tidligere sker altid ved "løftning". Den samme operation bruges til bestemmelse af arealerne af trekanter, trapezer og irregulære firkanter.

"Løftning" bruges generelt når en konkret størrelse bestemmes ved hjælp af multiplikation. I almindelighed bestemmes faktorernes orden stilistisk; for eksempel er det sædvanen at et tal der lige er fundet "løftes" til den anden faktor. Men der er én enkelt undtagelse: ved volumenbestemmelser er det ufravigeligt basis B der "løftes" til højden h. Termen er altså en endnu levende metafor når det gælder volumenbestemmelse, og død i alle andre sammenhænge. Vi må konkludere at metaforen kommer fra volumenberegning: Et prisme $h \times B$ får vi ved at "løfte" den "virtuelle højde" 1 KÙŠ af grundfladen B (forstået som skive) til den aktuelle højde h. Ideen svarer til definitionen af multiplikation i *Elementer* VII, def. 15 [ed. Heiberg 1884: 186]: produktet af h og B indeholder B lige så mange gange som h indeholder enheden.

Overførelsen af metaforen til arealmål forudsætter at arealer opfattes som sammensat af bånd med bredden 1 NINDAN, på samme måde som volumina er sammensat af skiver med tykkelse 1 KÙŠ. Så kan arealet findes ved "løftning" af striben $1 \times b$ til den virkelige bredde a.

Ideen om en "virtuel" bredde har også sat sine spor i de såkaldte "algebraiske" tekster. Det er en gammel iagttagelse at mange af disse adderer længder til eller subtraherer dem fra arealer – operationer der altid er blevet opfattet som geometrisk absurde og som bevis for at teksternes geometriske vokabular ikke kan tages alvorligt men blot bærer en rent numerisk tænkning.[3] Som jeg har vist andetsteds[4] er det en fejlslutning; den numeriske tolkning forklarer de tal der optræder i teksterne men hverken terminologiens struktur eller detaljerne i fremstillingen, somme tider end ikke operationernes rækkefølge; disse tekstniveauer gennemtvinger en geometrisk fortolkning.

Der er ingen tvivl om at forfatterne af visse oldbabyloniske tekster så et problem i additionen af længder og arealer. For at gøre den meningsfuld foretrak de at bruge en term der tillader addition af de to størrelsers måltal uden hensyn til deres konkrete

---

3. "It is true that they illustrated unknown numbers by means of lines and areas, but they always remained numbers. This is shown at once in the first example, in which the area xy and the segment $x-y$ are calmly added, geometrically nonsensical" [van der Waerden 1962: 72].

4. Mest grundigt i [Høyrup 2002].

betydning, og for at forvandle opgaven til et geometrisk problem udstyrede de derefter længden med en udtrykkelig bredde, i forskellige tekster kaldet “udstikkende 1”, “sokkel” eller “bredde nr. 2”. Denne bredde forvandler en linie s til et rektangel $1{\times}s$, som uden vanskelighed kan “føjes til” et andet areal. Dermed forsvinder vanskeligheden.

Men når det kommet til subtraktion af en linie fra et areal, så er der ingen terminologisk distinktion mellem operation på måltal og konkret operation til rådighed. Nogle tekster tillader sig endvidere at “føje” længder til arealer uden at have indført et “udstikkende 1” eller tilsvarende. De forudsætter simpelt hen – det kan ses af operationerne i en tekst som AO 8862[5] – at linierne er bånd der kan “tilføjes til” eller “udskæres fra” et areal.[6]

Skønt målesystemets vidnesbyrd har begrænset udsagnskraft er der alt i alt ingen tvivl om at den oldbabyloniske matematiske tænkning kendte til forestillingen om liniers “virtuelle bredde” – især der hvor den var tættest på den praktiske geometri.

Euklid – “Heron” – Platon

Euklid forklarer at en linie er en længde uden bredde (μῆκος ἀπλατές – *Elementer* I, def. 2 [ed. Heiberg 1883: 1]). Hverken Herons *Definitioner* [ed. Heiberg 1912: 14–16] eller Proklos' kommentar [Friedlein 1873: 96–100; trans. Morrow 1970: 79–82] antyder at denne “afgrænsning” (vel den mest adækvate oversættelse af Euklid's ὅρος) af begrebet havde til formål at udelukke forestillingen om bånd-linier. På dette niveau af græsk matematik – den modne teori – er der efter alt at dømme ingen spor af ideen om “brede linier”.

På andre niveauer – der hvor vi er tættere på praktisk landmåling eller i polemik mod dens sædvaner – *er* der på den anden side spor, og lejlighedsvis mere.

5. Se [Høyrup 2002: 164–167].

6. Det ser ud til at de tekster der forudsætter en virtuel bredde er blandt dem der er tættest på disciplinens oprindelse, nemlig skriverskolens lån af et lille antal geometriske gåder fra et landmålermiljø i starten af det 18. århundrede f.v.t. – se [Høyrup 2002: 378–385]. Den terminologiske skelnen og indførelsen af det “udstikkende 1” og dets ækvivalenter er dermed sekundære fænomener, resultatet af skolelæreres kritiske tænkning over de tvetydigheder der i første omgang var blevet overtaget fra landmålerne sammen med gåderne.

For det første er der de to pseudo-Heron antologier *Stereometrica* og *De mensuris*, hvor det forklares hvordan man finder hvad der resulterer fra 1 fod "på" (ἐπί) 1 fod" (*Stereometrica* II.69 [ed. Heiberg 1914: 160–162]; en smule anderledes *De mensuris* 27 [ed. Heiberg 1914: 182]). *Stereometrica* versionen diskuterer først 1 fod på 1 fod, idet 16 multipliceres med 16 (eftersom "1 fod indeholder 16 fingre"). Dernæst, for at finde og forklare 1½ fod på 1½ fod multipliceres 24 med 24, hvorefter resultatet divideres med 16; kvadratet forvandles altså til et bånd med bredde 1 fod, og dettes længde findes at være 36 [fingre] eller 2¼ fod.

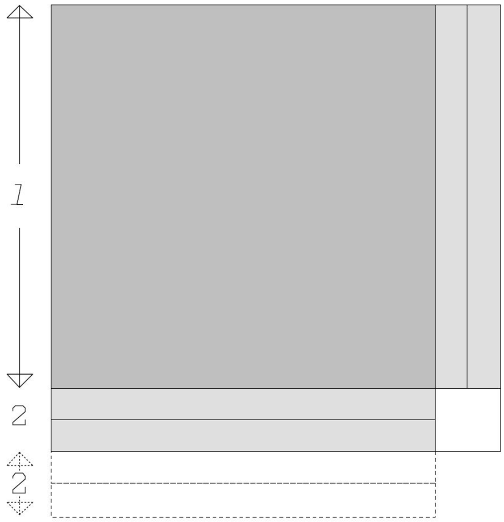
At der virkelig er tale om en tænkning i termer af bånd og ikke om et blot og bart regneskema fremgår af en tredie beregning, nemlig af (½+¼) fod på (½+¼) fod. Teksten multiplicerer (8+4) med (8+4) og finder 144. Men i stedet for at dividere med 16 (hvad der ville give et kontra-intuitivt "bånd" hvis bredde var større end længden) relaterer den produktet direkte til 16×16 = 256, og finder at forholdet er $½+{}^{1}/_{16}$.

Indtil dette punkt gør *De mensuris* det samme; men mens *Stereometrica* stopper her, fortsætter *De mensuris* med 2 fod på 2 fod og $(2+½+¼+⅛+{}^{1}/_{16})$ fod på $(2+½+¼+⅛+{}^{1}/_{16})$ fod; i begge tilfælde vendes der tilbage til forvandlingen til bånd, som bekræftelse af at det er metoden der skal bruges når et egentligt bånd resulterer.

De mensuris **25** [ed. Heiberg 1914: 180] – en enten forkert eller korrupt alternativ metode til at finde kapaciteten af et teater – stiller os over for et andet eksempel. Arealet reserveret til tilskuerne findes som produktet af den ydre og den indre perimeter (henholdsvis 100 fod og 80 fod). Det er også antallet af tilskuere, for "på én fod sidder der en mand, d.v.s., på 16 fingre". Her tænker Heiberg som en moderne matematiker og påpeger at der snarere skulle stå "256 fingre", da der efter hans mening er tale om kvadratfod. Tekstens ord er dog (på dette punkt) berettigede hvis vi tænker på arealet som bestående af bånd med bredde én fod og samlet længde 8000 fod; da teksten ikke finder behov for at gøre dette klart må denne opfattelse af arealet have faldet forfatteren naturlig.[7]

7. Bredden af afstanden mellem trinnene i virkelige teatre er irrelevant for betragtningen. I det foregående kapitel (hvor selve arealberegningen er matematisk korrekt) formodes afstanden mellem trinnene at være ca. 6 cm (hvis teatret forudsættes at være en halvcirkel) eller ca. 3 cm (hvis vi går ud fra en fuld cirkel).

Klarere end disse er et eksempel fra kapitel af **24** *Geometrica*, en anden pseudo-Heron antologi [ed. Heiberg 1912: 418] (som det fremgår af Heibergs kritiske apparat er kapitel **24** faktisk et uafhængigt skrift). Her løses et problem af samme type som dem der behandles i den oldbabyloniske "algebra" (dog ikke afledt fra skoletraditionen, der blev brutalt afbrudt efter 1600 f.v.t., men fra en af de oprindelige landmålergåder): Det handler om et kvadrat, hvis areal (A) sammen med dets perimeter ($4\ \ell$) udgør 896 fod, og det forlanger at arealet skilles fra perimeteren.[8] 4 enheder "sættes uden for" (*ἐκτίθημι*) kvadratet. Halvdelen er 2 *fod* – hvad der viser at siden faktisk opfattes som et rektangel med længde ℓ og bredde 1 fod. [Linien på] 2 fod "stilles på" sig selv, og 4 fod resulterer. Hvis disse føjes til de 896 fod resulterer 900 fod, og siden af kvadratet er derfor 30 fod. Eftersom halvdelen er blevet "taget væk nedenunder" (*ὑφαιρέω*)[9] de 4, resulterer 2 fod [som rest]; og [som side af det oprindelige kvadrat] resterer [når også disse to fjernes] 28 fod. Arealet er altså [28×28 =] 784 fod, og perimeteren [4×28 =] 112 fod. Hvis alt sættes sammen, resulterer 896, som er arealet sammen med perimeteren. Proceduren kan følges i Figur 1. Som vi ser måles både længde ℓ og areal i fod, og aldeles uproblematisk *i samme slags fod.*



Figur 1.

Heiberg mener at tekstens kompilator har kopieret uden at forstå hvad han skriver. Det er naturligvis altid muligt, men Heibergs begrundelse for at mene det holder ikke.[10] Endvidere, selv hvis kompilatoren ikke forstår må han have kopieret fra en græsk original hvis forfatter forstod. Han har hverken oversat en tekst skrevet på et andet sprog eller kopieret en tradition der er blevet skabt uden forståelse; det fremgår ikke blot af brugen af græsk metrologi (foden) men også af den stilistiske afstand til de

8. Heibergs oversættelse skjuler en del af argumentet. Jeg giver her en tæt parafrase af den græske tekst.
9. Den bogstavelige oversættelse er berettiget – ingen anden subtraktion i nærheden er "*ὑφαιρέω*".
10. Heiberg følger ikke det geometriske argument og ser derfor ikke at man for at finde siden ℓ fra de 30 skal fjerne netop den halvdel der i første omgang blev efterladt da den anden halvdel blev taget bort "nedenunder" og "stillet ovenpå". Han ser derfor denne passage som tegn på manglende forståelse.

mulige vestasiatiske og demotiske kilder. I det hele taget er de spor af "brede linier" der dukker op i de pseudo-Heroniske skrifter forbundet med græske sædvaner og praktikker; vi kan slutte at de svarer til tankebaner der var udbredte også blandt græske *logistikoi*.

Både længder og arealer måles også i fod i Platons dialoger. Det sker bl.a. i to passager der er berømte blandt matematikere på grund af referencerne til *dýnamis*-begrebet: *Theaetetus* 147D and *Politicus* 266B. De pseudo-Heroniske skrifter gør det nærligende at antage – men beviser ikke – at disse passagers *δίπους*, *τρίπους* og *πεντέπους* ikke skal forstås som abstrakte mål, altså som 2, 3 og 5 kvadratfod, men snarere som bånd af længde 2, 3 og 5 fod (og bredde 1 fod).

En anden Platon-passage taler langt tydeligere, nemlig *Nomoi* 819D–820B [trans. Bury 1926]. "Athenienseren" taler her om "a certain kind of ignorance [...] naturally inherent in all men", men mere præcist blandt alle grækere (d.v.s. almindelige Grækere – konteksten viser at matematikere ikke medregnes): nemlig den opfattelse at længder, bredder og dybder[11] "are commensurable with another"[12].

I det følgende specificeres det at der faktisk er tale om to distinkte fejlopfattelser:

–For det første at længder kan måles med længder, bredder med bredder, og dybder med dybder;

–for det andet, "as regards the relation of length and breadth to depth, or of breadth and length to each other – do not all we Greeks imagine that these are somehow commensurable with one another?"

Den første fejltagelse henviser selvfølgelig til opdagelsen af irrationelle forhold, for eksempel (Aristoteles' standardeksempel) forholdet mellem kvadratets side og diagonal; det er ikke sandt at enhver længde kan måle enhver anden længde. Det er uinteressant i den nærværende sammenhæng.

11. Bury oversætter som "lines", "surfaces" and "solids", imod den direkte betydning af *μῆκος*, *πλάτος* og *βάθος* men i foregribelse af hvad der (som vi straks skal se) kan læses ud af konteksten).

12. Mere præcist siger den græske tekst at de alle "kan måles ved hinanden" (*πάντα μετρητὰ πρὸς ἄλληλα*). Det tekniske kommensurabilitetsbegreb er altså en tilsnigelse. Faktisk formodes det ifølge teksten at den gensidige måling kan gøres enten "absolut" (*σφόδρα*) eller "så nogenlunde" (*ἠρέμα*), hvad der er meningsløst hvis vi tænker på det tekniske begreb – jeg erindrer hvor forarget Marinus' gamle ven Olaf Schmidt blev da jeg refererede passagen for ham (den bekræftede Olafs i almindelighed negative meninger om filosoffer der udtaler sig om matematik).

Den anden synes mere dunkel – jfr. [Mueller 1992: 94–95]. Hvis længde, bredde og dybde alle forstås som lineære udstrækninger, så er der ingen virkelig forskel på de to fejltagelser. Den anden mulighed er at forstå "bredde" som en sammentrukket betegnelse for størrelser der *også* er udstyret med en bredde (altså flader), og tilsvarende at tolke "dybder" som størrelser der *også* har en dybde – altså legemer, siden denne dimension her og andetsteds af Platon omtales som "den tredie".

Til fordel for den sidste tolkning taler ikke blot at den tillader fejltagelse nummer to at være forskellig fra nummer 1 men også at den svarer til den matematiske terminologis almindelige karakter. Vi træffer en tilsvarende sammentrækning når den unge Theaitetos definerer *kvadratiske* tal (*Theaetetus* 147E–148A) som tal der kan genereres som produkt af ens faktorer, mens *aflange* tal er sådanne som *kun* kan genereres af ulige faktorer – det kan kvadratiske tal naturligvis også. Samme mønster gentager sig lidt senere når han omtaler linier der *kun* kan måles *dynamei* (d.v.s., når de forstås som parametrisering af et kvadrat, jfr. [Høyrup 1990]) som *dynameis*, mens de der *også* har et måltal når de forstås direkte som længder omtales netop som *længder*.

Sammentrækningen i *Nomoi* kan også illustreres af hvad Proklos har at sige om Euklids definition af linien [Friedlein 1873: 96–97, trans. Morrow 1970: 79]: Der er ingen grund til at sige "without breadth and without depth" eftersom "everything that is without breadth is also without depth" – "denying breadth of [the line] he has also taken away depth".

Ikke desto mindre fortrækker Ian Mueller (med en svag tvivl) at holde sig til den første tolkning. Fejltagelsen der ligger i at tro længder, flader og legemer sam-målelige blot fordi de alle måles i "fod" forekommer ham så banal at han ikke kan tro Platon ville polemisere imod den.

Som vi har set er det fælles mål i "fod" dog mere end et udtryk for fraværet af det eksponentsymbol der tillader *os* at skelne mellem "fod", "fod^2" og "fod^3". Det er udtryk for et komplekst tankesæt, og hvis længder er bærere af en virtuel bredde (som kan aktualiseres når der er behov for det), så er det ikke nogen triviel fejltagelse at mene at længder og flader kan måle hinanden enten eksakt eller i det mindste med tilnærmelse – faktisk er det slet ikke nogen fejltagelse.

Men det forblev en fejltagelse for dem som transformerede geometrien fra landmålerteknik til teori. For dem, som for Platon, var det ikke blot en fejltagelse men en fejltagelse der måtte udryddes, præcis ligesom de udryddede den fejltagelse at alle linier er kommensurable. Vi kan tænke på det oldbabyloniske "udstikkende 1", der synes at have tjent præcis samme formål (note 6).

Afrunding og en smule morale

Lad os vende tilbage til Euklids definition af linien. Hverken Heron (den virkelige) eller Proklos giver udtryk for at "uden bredde" skal tjene til at udgrænse bånd-linierne; formodentlig var de allerede afskrevet blandt geometere da Euklid skrev sine *Elementer.* Men definitionen er ikke Euklids opfindelse. Den citeres ordret (som en allerede gængs definition) i Aristoteles' *Topica* 143b11 [ed. Tredennick & Forster 1960: 591]; måske blev den allerede brugt af Platons matematiker-venner, og måske er den endnu ældre. Det interessante er imidlertid Aristoteles' argument: Han påpeger at definitionen forudsætter eksistensen af en genus (længder) der består af to species: Længder *udstyret med bredde* og *længder uden bredde*. Ifølge Aristoteles eksisterer de begge. Det viser at (platoniske) ideer ikke kan eksistere; enten har *længdens ide* bredde, eller den har ikke; men i begge tilfælde ville eksistensen af to species være udelukket.

Vi kan ikke være sikre på at "længder forsynet med bredde" er den praktiske landmålings bånd-linier; muligvis tænker Aristoteles blot på flader; men bånd-linierne er heller ikke udelukkede. Det forbliver en mulighed at afgrænsningen "uden bredde" oprindelig skulle tjene til at udelukke "brede linier" (hvad der ifølge *Nomoi*-passagen ville være i Platons ånd).

Passagen i *Nomoi* selv er mere entydig. Kun forestillingen om bånd-linier tillader os at skelne mellem to fejltagelser som er både forskellige og substantielle.

Hvad angår de oldbabyloniske tekster var den manglende forståelse af de "brede linier" den vigtigste grund til valget af en rent numerisk tolkning af "algebraen". Som vi har set blev "fejltagelse nummer 2" så effektivt undertrykt at Heiberg, da han udgav *Geometrica*, fandt forvirring der hvor teksten rent faktisk giver en klar og korrekt beskrivelse.

Ethvert matematisk tankesystem og sprog indeholder et rigt mål af tvetydigheder, som dets udøveres fælles træning og praksis forhindrer i at manifestere sig. I Euklids geometri er således *en figur* (et σχῆμα – *Elementer* I, def. 14) noget der afgrænses af én eller flere *grænser* (ὅροι), og et kvadrat er en figur (def. 22) [ed. Heiberg 1883: 4, 6]. Men et kvadrat kan også være ens med én eller flere andre figurer (for eksempel i *Elementer* I, 47 og II, 14 [Heiberg 1883: 110, 160]), og så er det pludselig reduceret til sit areal. *Inden for* den matematiske diskurs der er tale om forbliver sådanne tvetydigheder som regel skjult – de reguleres af det operationelle rum begreberne afhænger af og som terminologien taler om: hvis et kvadrat deles af en diagonal, er der ingen tvivl om at der er tale om *figuren*; hvis det er fem gange et andet, må det dreje sig om *arealet*.

Dette fravær af pedanteri tjener tankens økonomi. Men når man – det være sig som matematikhistoriker eller som matematiklærer – tror at kun de andres og ikke ens egen diskurs indeholder tvetydigheder; når man ikke forstår at også de andres tvetydigheder er virtuelle og ikke aktuelle fordi også de reguleres af *deres* operationsrum; når man dermed glemmer at *forskellige tvetydigheder* er en priviligeret vej til forståelse af *de andres* tænkning – så forvandles fraværet af pedanteri i ens egen diskurs til pedanteri og intolerance over for disse andre, og en barriere for forståelse.

Måske kan opdagelsen af denne intolerance i historiske studier og forsøget på at overvinde den bidrage til at blive opmærksom på den og til at overvinde den i matematikundervisningen – et område der (som historikeren med eller mod sin vilje må erkende) er langt mere vigtigt i denne verden end historiografien som ren videnskabelig disciplin.

Henvisninger

Boncompagni, Baldassare (ed.), 1862. *Scritti* di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo. Vol. II. *Practica geometriae* et *Opusculi*. Roma: Tipografia delle Scienze Matematiche e Fisiche.

Bury, R. G.(ed., trans.), 1926. Plato, *Laws*. 2 vols. (Loeb Classical Library). London: Heinemann / New York: Putnam.

Friedlein, Gottfried (ed.), 1873. Procli Diadochi *In primum Euclidis Elementorum librum commentarii*. Leipzig: Teubner.

Heiberg, J. L. (ed., trans.), 1883. Euclidis *Elementa*. Vol. I. Leipzig: Teubner.

Heiberg, J. L. (ed., trans.), 1884. Euclidis *Elementa*. Vol. II. Leipzig: Teubner.

Heiberg, J. L. (ed., trans.), 1912. Heronis *Definitiones* cum variis collectionibus. Heronis quae feruntur *Geometrica*. Leipzig: Teubner.

Heiberg, J. L. (ed., trans.), 1914. Heronis quae feruntur *Stereometrica* et *De mensuris*. Leipzig: Teubner.

Høyrup, Jens, 1990b. "*Dýnamis*, the Babylonians, and Theaetetus 147c7—148d7". *Historia Mathematica* **17**, 201–222.

Høyrup, Jens, 2002. *Lengths, Widths, Surfaces: A Portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin*. New York: Springer.

Morrow, Glenn R. (ed., trans.), 1970. Proclus, *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Mueller, Ian, 1992. "Mathematics and Education: Some Notes on the Platonic Programme". Pp. 85–104 *in* I. Mueller (ed.), *Peri Tōn Mathēmatōn*. Edmonton, Alberta: Academic Printing and Publishing.

Pacioli, Luca, 1494. *Summa de Arithmetica geometria Proportioni: et proportionalita*. Venezia: Paganino de Paganini.

Parker, Richard A., 1972. *Demotic Mathematical Papyri*. Providence & London: Brown University Press.

Peet, T. Eric, 1923. *The Rhind Mathematical Papyrus, British Museum 10057 and 10058*. London: University Press of Liverpool.

Tredennick, Hugh, & E. S. Forster (eds, trans.), 1960. Aristotle, *Posterior Analytics* and *Topica*. (Loeb Classical Library 391). Cambridge, Mass.: Harvard University Press / London: Heinemann.

van der Waerden, B. L., 1962. *Science Awakening*. 2nd Edition. Groningen: Noordhoff.